Сингулярлы қисықсызықты интеграл.

L – тегіс контур; τ, t – оның нүктелерінің комплекс координаталары. Қисықсызықты ерекше интегралды қарастырайық

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau . \tag{14}$$

Контурдың t нүктесінен, центрдағыдай, радиусы ρ-ға тең шеңбер жүргізейік, және t_1, t_2 – нүктелері осы шеңбердің қисықпен қиылысу нүктелері болсын. Радиусты шеңбер L қисығымен t_1, t_2 нүктелерінен басқа қиылысу нүктелері жоқ болатындай кіші деп санаймыз. l арқылы шеңбер кесіп алатын L контурының бөлігін аламыз, және қалған доға бойынша интеграл алайық

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau . \tag{15}$$

Анықтама. (15) интегралдың $\rho \to 0$ болғандағы шегі, (14) интегралдың басты мәні деп аталады.

Егер бұл шек бар болса, онда ерекше (14) интегралы Коши бойынша басты мән мағынасында бар деп айтады, ал интегралдың өзін көбінесе Кошидің сингулярлы интегралы деп айтады.

(14) сингулярлы интегралының бар болуы туралы сұрақты қарастыруды қарапайым интегралдан бастаймыз

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} . \tag{16}$$

Интеграл астындағы функцияның $\ln(\tau - t)$ алғашқысы бар және ол көпмәнді функция. $\ln(\tau - t)$-ні t және ∞ бөліктену нүктелерін қосатын бір қисық бойымен кесілген жазықтықтағы бірмәнді аналитикалық $\ln(z - t)$ функциясының контурлы мәні деп қарастырамыз. Анықтылық үшін, кесу қисықтан оң жақта өтеді деп шарт қояйық. Онда

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln(\tau - t)\,|_a^{t_1} + \ln(\tau - t)\,|_{t_2}^{b} = \ln\frac{b-t}{a-t} + \ln\frac{t_1 - t}{t_2 - t},$$

Мұндағы a және b – L контурының бастапқы және ақырлы нүктелері. Бірақ

$$\ln\frac{t_1-t}{t_2-t}=\ln\left|\frac{t_1-t}{t_2-t}\right|+i\left[\arg(t_1-t)-\arg(t_2-t)\right].$$

Анықтама бойынша, $|t_2-t|=|t_1-t|$, сәйкесінше бірінші қосылғыш нөлге айналады.

$\rho\to 0$ болғанда, $\arg(t_1-t)-\arg(t_2-t)$ – L контурының t нүктесінде жүргізілген оң және сол жанамалар арасындағы бұрышқа ұмтылады. Егер t – контурдың тегістік нүктесі болса, онда бұл бұрыш π-ға тең. Бұрыштық нүктелерінде ол $\alpha\neq\pi$-ға тең, қайтарым нүктелерінде $\alpha=0$ немесе $\alpha=2\pi$. Сол себепті

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{b-t}{a-t}+i\pi,$$

егер t – тегістік нүктесі, және

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{b-t}{t-a}+i\alpha, \qquad (17)$$

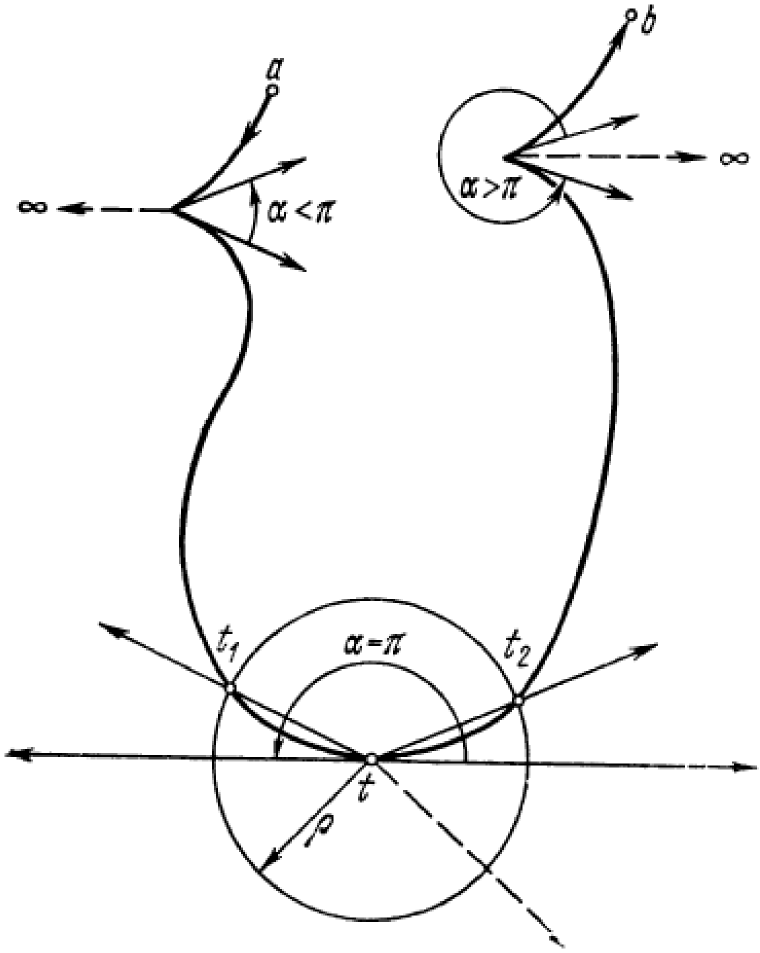
басқа жағдайларда. Егер L контуры тұйық, $a=b$, онда

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=i\pi$$

тегістік нүктелерінде, және

$$\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=i\alpha$$

L контурының бұрыштық нүктелерінде.



Сурет 1.

Енді ерекше

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \; . \qquad (18)$$

интегралын қарастырайық, мұндағы $\varphi(\tau)$ Гельдер шартын қанағаттандырады. Оны

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \int_L \frac{d\tau}{\tau - t}$$

түрінде жазайық.

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau$$

интегралында интеграл астындағы функция бірден кіші ерекшелікке ие, сәйкесінше ол (8), (13) жинақталады. Гельдер шартын қанағаттандыратын

$\varphi(\tau)$ функциясы үшін (18) сингулярлы интегралы Коши бойынша басты мән мағынасында бар екендігін алайық. Әрі, барлық тегістік нүктелерде оны екі түрде беруге болады:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t)\left[\ln \frac{b-t}{a-t} + \pi i\right],$$

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \ln \frac{b-t}{t-a}. \qquad (19)$$

Дербес жағдайда, тұйық контур үшін($a = b$)

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + i\pi\varphi(t). \qquad (20)$$

аламыз.

Бұдан әрі қарай, сингулярлы интеграл туралы айтқанда, оны осы басты мән мағынасында түсінеміз.

Ерекше интегралдың қасиеттері

Ерекше интеграл интегралдың қарапайым қасиеттеріне ие: қосындыдан интаграл интегралдар қосындысына тең және тұрақты көбейткішті интеграл сыртына шығарсақ болады. Енді тривиалды емес – айнымалыны ауыстыру ережесімен бөліктеп интегралдау қасиеттеріне өтпестен бұрын, маңызды бір ескерту жасайық.

Басты мән ұғымын енгізгенде, ең маңызды пункт ретінде, кесіп алынатын маңай зерттерліп отқан нүктеге қатысты симметриялы алынады деп айтылған болатын. Бірақ қатаң симметрияда қажеттілік жоқ, себебі маңызды шарт болып $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ емес, ал

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$$

алынады. Дәл солай, t_1, t_2 нүктелері бір шеңбер бойында жатуы емес($|t_2 - t| = |t_1 - t|$), ал

$$\lim_{t_1 \to 0, t_2 \to 0} \left| \frac{t_2 - t}{t_1 - t} \right| = 1 \tag{21}$$

шарты маңызды. Сонда егер біз симметри шартын алып тастап тек (21) шарты қалдырсақ, онда ерекше интеграл, жалпылырақ көзқарастан анықталған, алдында енгізілген оның басты мәнімен сәйкес болады.

Теорема(айнымалыны ауыстыру ережесі). Егер $\tau = \alpha(\zeta)$ функциясының, еш жерде нөлге айналмайтын, бірінші үзіліссіз туындысы $\alpha'(\zeta)$ бар және L контурын L' контурына бірмәнді түрлендірсін, ал $\varphi(x)$ Гельдер шартын қанағаттандырасын, онда

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta,$$

мұндағы

$$t = \alpha(\zeta).$$

Теорема (бөліктеп интегралдау). Егер $\varphi(\tau)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция және t нүктесі тегіс L контурының ұштарымен сәйкес болмаса(a және b), онда бөліктеп интегралдаудың келесі формуласы орынды:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = i\pi\varphi(t) + \varphi(b)\ln(b - t) - \varphi(a)\ln(a - t) -$$

$$-\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t) d\tau. \tag{22}$$

Дәлелдеу. Бірмәнді $\ln(\tau - t)$ бөлігі, t нүктесін ∞ нүктесімен, L-дің оң жағындағы, кесу бойынша алынатынын еске түсірейік. Егер бұл кесу L-дің сол жағынан жүргізілсе, онда (22) формуланың оң бөлігінің бірінші мүшесінде минус таңбасын алу керек.

Дәлелдеу кезінде оң жақтағы интегралдан бастаймыз

$$\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau.$$

Соңғысы меншіксіз ретінде мағынасы бар. Оны анықтау үшін t нүктесінің маңайын кез-келген амал бойынша кесіп алсақ болады. Оны басты мәнді анықтағандай жасайық

$$\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau = \lim_{\rho\to 0}\left[\int_a^{t_1}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau + \int_{t_2}^{b}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau\right].$$

Тік жағшадағы қарапайым интегралдарды бөліктеп интегралдасақ

$$\int_a^{t_1}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau + \int_{t_2}^{b}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau =$$

$$=\varphi(b)\ln(b-t)-\varphi(a)\ln(a-t)-\varphi(t_1)\ln(t_1-t)-$$

$$-\varphi(t_2)\ln(t_2-t)-\int_a^{t_1}\frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\int_{t_2}^{b}\frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

$\rho\to 0$ шегіне көшсек, алғашқы екі мүше өзгермейтінін, соңғы екі мүше қосындысы басты мән мағынасында түсінілетін

$$-\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

интегралын беретінін аламыз. Басқа қосылғыштардың шегін табу үшін келесі түрлендіруді жасайық:

$$\varphi(t_1)\ln(t_1-t)-\varphi(t_2)\ln(t_2-t)=\varphi(t)[\ln(t_1-t)-\ln(t_2-t)]+$$

$$[\varphi(t_1)-\varphi(t)]\ln(t_1-t)-[\varphi(t_2)-\varphi(t)]\ln(t_2-t).$$

$\varphi(t)$ функциясы үзіліссіз дифференциалданатын функция ретінде Гельдер шартын қанағаттандырады. Осы жерден, $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ негізінде, алдыңғы өрнектегі соңғы екі қосынды шектері нөлге тең екендігін аламыз.

$\ln(t_1-t)-\ln(t_2-t)$ шегі қарастырылған. Ол $i\pi$-ға тең.

Теорема дәлелденді.

Егер L тұйық контур($a=b$), онда (22) формула ықшамдалады:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = i\pi\varphi(t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)d\tau. \qquad (23)$$